



CENTRE DE ROCQUENCOURT

# Rapports de Recherche

N° 166

## ÉTUDE BIDIMENSIONNELLE DE L'INSERTION D'UNE CHEVILLE SOUPLE DANS UN ENSEMBLE RIGIDE

Jean-Pierre MERLET

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
BP 105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France

Tél 954 90 20

Octobre 1982

Etude Bidimensionnelle de l'insertion  
d'une cheville souple dans un ensemble rigide.

J.P. MERLET  
(Octobre 1982).



PAPIER RECUPERÉ ET RECYCLE

Résumé : On étudie, dans le cadre d'une analyse limitée à deux dimensions, deux phénomènes mécaniques intervenant lors des problèmes d'assemblage de chevilles : le cas du blocage total et celui où les actions de contact ne sont pas correctrices des erreurs d'alignement.

On propose des conditions à satisfaire pour que le système se trouve en dehors de ces deux situations dans le cas d'une cheville souple de dimensions et de formes variables. Le cas particulier d'une cheville cylindrique est traité à titre d'exemple. On y montre qu'il existe une profondeur d'insertion limite au-delà de laquelle il ne peut plus y avoir blocage total.

Abstract : The goals of this paper are to study, in a two dimension peg in hole analysis, the jamming and wedging phenomenas that occur during the insertion of a pliant peg into a stiff part. General conditions are given to avoid jamming and wedging.

The particular case of a cylindrical peg is studied and we show that it exists an insertion depth beyond which jamming will not occur.

## Introduction

Un tiers des opérations d'assemblage consiste dans l'insertion de cheville dans un trou [ / ]

Des études partielles des problèmes mécaniques intervenant lors de cette opération ont été effectuées, en particulier pour le cas d'un cylindre rigide [2], [3]

Ces analyses ont mis en évidence deux phénomènes s'opposant à l'insertion. Le premier est un cas de blocage total avec comme seule correction possible un retrait de la cheville nécessitant un effort important.

Le deuxième est celui où les actions de contact ont tendance à aggraver les erreurs de positionnements et s'opposent donc à ce que l'on laisse une certaine souplesse (compliance) au poignet du robot pour réussir l'insertion.

Dans le cas d'une cheville cylindrique rigide on a pu obtenir [2], à l'aide d'une analyse bidimensionnelle statique, des conditions à satisfaire pour éviter les deux configurations de blocage (fig.1).

On va tenter de généraliser cette étude au cas où la cheville n'est plus infiniment rigide. L'analyse restera bidimensionnelle mais, sous cette contrainte, on pourra traiter des systèmes de formes variables.

On suppose réussi un début d'insertion, le contact s'effectuant en deux points. Les hypothèses sont :

- déformations faibles
- cheville évoluant dans son domaine élastique
- variations de formes lentes
- erreur angulaire faible

## Notations et Conventions

La cheville est un solide matériel noté  $(\Sigma)$  Elle possède un contour  $\mathcal{J}$  dans le plan où l'on fait l'analyse.  $\mathcal{J}$  est un contour fermé défini par deux segments de droite AC et EF et par deux arcs EC et AF (fig.2) EF correspond à l'encastrement de la cheville dans l'organe de préhension du robot. I et O sont définis comme milieu de EF et AC. On définit deux repères  $R(I, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  et  $R_A(I, \vec{x}_A, \vec{y}_A, \vec{z}_A)$  avec  $(\vec{x}, \vec{z}), (\vec{x}_A, \vec{z}_A)$  vecteurs directeurs du plan d'analyse.  $\vec{z}$  est un vecteur directeur de l'axe du trou et est perpendiculaire à EF. Le contact de la cheville et du trou se fait aux points A et B. Les coordonnées des points A, B, O sont :

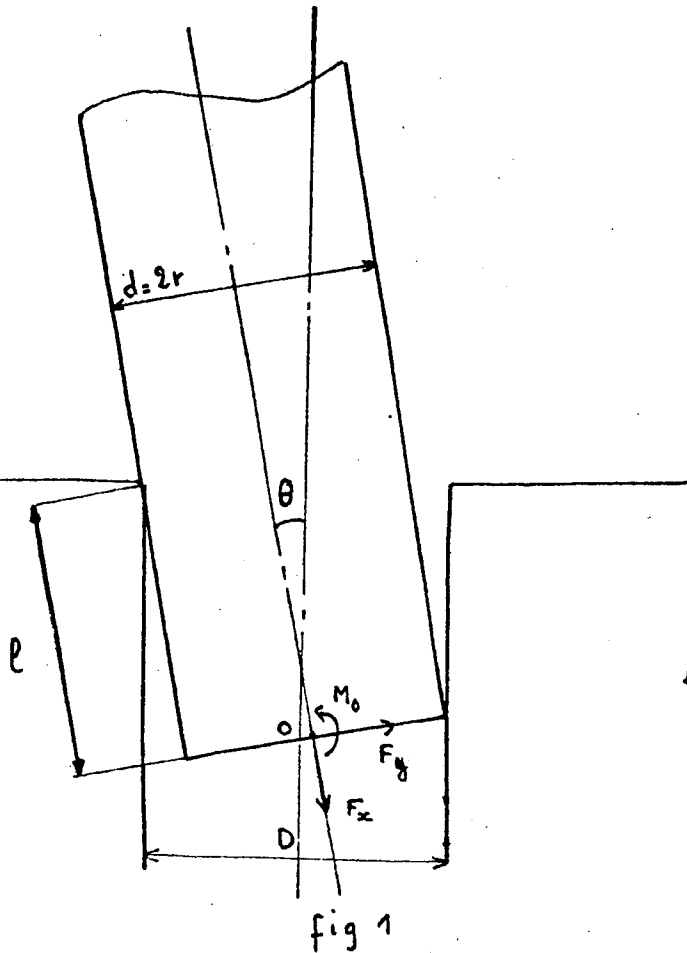
$$\begin{array}{c|c|c|c|c} R & \begin{array}{c} x_A \\ x_B \end{array} & \begin{array}{c} z_A \\ z_B \end{array} & B & \begin{array}{c} x_{10} \\ x_{20} \end{array} & \begin{array}{c} z_{10} \\ z_{20} \end{array} & O & \begin{array}{c} x_{10} \\ x_{20} \end{array} \\ R_A & \begin{array}{c} x_A \\ x_B \end{array} & \begin{array}{c} z_A \\ z_B \end{array} & R_A & \begin{array}{c} x_{10} \\ x_{20} \end{array} & \begin{array}{c} z_{10} \\ z_{20} \end{array} & R_A & \begin{array}{c} x_{10} \\ x_{20} \end{array} \end{array}$$

On passe de  $R$  à  $R_A$  par une rotation d'angle  $\theta$  autour de la droite passant par I de vecteur directeur  $\vec{x}_3$

$$\text{Par définition } l = x_{10} - x_{1A} \quad D = x_{20} - x_{2A}$$

Les actions de contact sont :

- en A : un effort tangentiel  $T_x$  orienté selon l'axe  $\vec{z}$  et un effort normal  $N_x$  orienté selon l'axe  $\vec{x}$



$$c = \frac{D-d}{d}$$

$\mu$ : coefficient de frottement statique

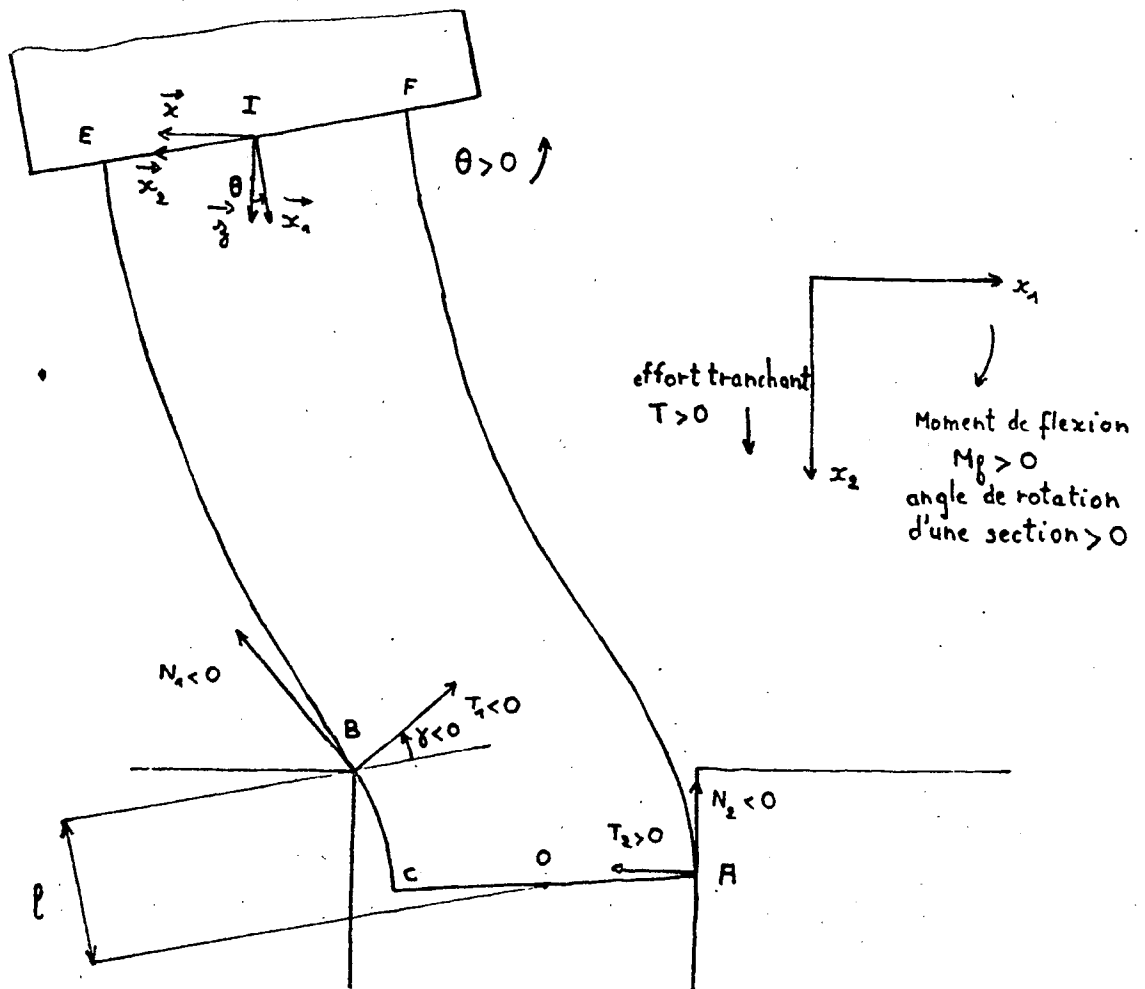
$$\lambda = \frac{l}{2\mu r}$$

condition de non-blocage

$$\frac{l}{2r} > \mu + \frac{c(1+\mu^2)}{\mu}$$

condition d'auto-correction

$$\frac{M_0/rF_x}{\text{sign}(\theta)\lambda} + \frac{F_y/F_x}{\text{sign}(\theta)\frac{\lambda}{(\lambda+1)\mu}} < 1$$



effort tranchant  
 $T > 0$

Moment de flexion  
 $M_f > 0$   
angle de rotation  
d'une section  $> 0$

- en B : un effort tangentiel  $T_A$  porté par la tangente de  $J$  en B et un effort normal  $N_A$  porté par la normale de  $J$  en B.

On pose  $\mu = \tan(\varphi)$  le coefficient de frottement statique. Il sera supposé identique en A et B.

Les conventions de signe pour l'action des efforts d'une facette de gauche sur une facette de droite sont indiquées fig.2

On suppose qu'il n'y a pas de gauchissement des sections planes. On notera :

- E : module de Young du matériau
- $G_A(x_A)$  : barycentre de la section  $S_e$  de  $(\Sigma)$  à l'abscisse  $x_A$
- $I_3(x_A)$  : moment quadratique de la section  $S_e(x_A)$  par rapport à la droite passant par  $G_A(x_A)$ , de vecteur directeur  $\vec{x}_3$
- $\nu$  : coefficient de Poisson du matériau
- G : module d'élasticité transversal (module de Coulomb).  
On a

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

- $S(x_A)$  : surface de la section  $S_e(x_A)$
- $L(x_2)$  : dimension selon  $x_3$  de la section à l'ordonnée  $x_2$  (fig.3)
- $A_3(x_2)$  : aire de la surface  $H/J$  (fig.3)

$$\text{On pose } \lambda(x_A) = \frac{S(x_A)}{I_3^2(x_A)} \iint_{S_e} \frac{A_3^2(x_2)}{L^2(x_2)} ds(x_2)$$

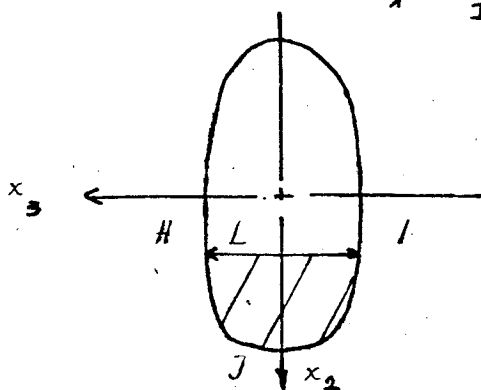


fig. 3

### Etude du blocage total

SIMUNOVIC a étudié ce phénomène [2] et a pu montrer qu'une condition de non blocage était qu'un des points A ou B soit à l'extérieur du cône de frottement de son homologue. On va exprimer une condition pour que B soit hors du cône de frottement de A. La droite délimitant le cône de frottement de A pour équation :

$$\lambda_2 = - \frac{\lambda_A}{\tan(\varphi + \theta)} + \frac{x_{1A}}{\tan(\varphi + \theta)} + x_{2A}$$

Pour  $\lambda_A = x_{1B} = x_{1A} - L$  on doit avoir  $\lambda_2 > x_{2B}$

On peut alors écrire

$$l > (x_{A_0} - x_A) + (x_{A_0} - x_A) / p + \frac{(1+p)(D_{A_0} - D_A)}{x_{A_0} - x_{A_0}} \quad (1)$$

Pour exprimer plus formellement (1) on va s'intéresser à la déformée de  $(\Sigma)$

On suppose que l'on dispose du torseur des forces exercées par l'encastrement sur la cheville en I :  $(\vec{F}, \vec{M}_I)$

$$\vec{F} = F_{x_2} \vec{x}_2 + F_{x_4} \vec{x}_4 \quad \vec{M}_I = M_I \vec{x}_3$$

À l'abscisse  $x_A$  la facette de gauche exerce sur la facette de droite un moment de flexion  $M_b$

$$M_b = p(x_A) + F \cdot x_2 \quad p(x_A) = M_I - x_A \cdot F_{x_2} \quad F = F_{x_4}$$

La flèche de la cheville à l'abscisse  $x_A$  s'écrit comme la somme de la flèche due à la flexion  $x_{2b}$  et celle due à l'effort tranchant  $x_{4t}$  (on néglige l'effort normal)

$$\frac{dx_{2b}}{dx_A} = - \frac{M_b}{EI_3(x_A)} \quad (2) \quad \frac{dx_{4t}}{dx_A} = - \frac{\lambda(x_A) T}{GS(x_A)} \quad (3)$$

L'effort tranchant  $T$  peut s'écrire sous la forme

$$T = -P \frac{dx_2}{dx_A} + Q \quad (4)$$

Soit  $\lambda_{A_0}$  l'abscisse de la section de  $(\Sigma)$  perpendiculaire à la ligne neutre contenant le point B

$$P = F_{x_4} \quad Q = F_{x_2} \quad \text{pour } 0 \leq x_A < \lambda_{A_0}$$

$$P = T_2 \sin(\theta) - N_2 \cos(\theta) - T_1 \sin(\gamma) + N_1 \cos(\gamma)$$

$$Q = -T_2 \cos(\theta) - N_2 \sin(\theta) + T_1 \cos(\gamma) + N_1 \sin(\gamma) \quad \lambda_{A_0} \leq x_A$$

L'équation différentielle régissant la déformée s'écrit à l'aide de (2), (3), (4)

$$\frac{d^2 x_2}{dx_A^2} (1 + \lambda^2) + \frac{dx_2}{dx_A} \left[ p \frac{d\lambda(x_A)}{GS(x_A) dx_A} - \frac{\lambda(x_A) p}{GS^2(x_A)} \frac{dS(x_A)}{dx_A} \right] + \frac{F_{x_2}}{EI_3(x_A)} + \frac{p(x_A)}{EI_3(x_A)} + \frac{Q}{GS(x_A)} \frac{d\lambda(x_A)}{dx_A} - \frac{\lambda(x_A) Q}{GS^2(x_A)} \frac{dS}{dx_A} = 0 \quad (5)$$

Les conditions aux limites sont :

$$x_2(0) = 0 \quad \frac{dx_2}{dx_A}(0) = 0$$

Par continuité on pourra déterminer celles concernant le tronçon d'abscisse supérieure à  $\lambda_{A_0}$

Remarquons que l'équation de la déformée peut être obtenue par de simples mesures de forces et de moment au poignet du robot puis par intégration de l'équation différentielle dans sa partie comprise entre l'encastrement et la section contenant B.

Il n'en sera pas de même pour les sections entre B et A où la mesure des forces est beaucoup plus délicate.

Dans le cas général l'intégration de (5) se fait de manière numérique.



## Méthode générale de résolution

On suppose connu  $x_{10}$ ,  $M_z$ ,  $F_{x_1}$ ,  $F_{x_2}$ ,  $L$  la longueur initiale de  $(\Sigma)$ .  $x_{10}$  est déterminé par la résolution de l'équation

$$L = \int_0^{x_{10}} \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{dx_1}{dx_2} \right)^2 \right) dx_1 \quad (6)$$

$x_{10}$  donne par intégration de (5)  $x_{10}$  et  $\frac{dx_1}{dx_2}(x_{10})$ . On obtient alors  $x_{1A}$  et  $x_{2A}$  en écrivant que A appartient à la droite passant par O perpendiculaire à la ligne neutre. Soit le point W de la ligne neutre tel que  $x_{1W} = x_{10}$ . Si  $r$  est la distance de W au contour  $J$  on a

$$x_{20} = x_{2W} + r \quad (7)$$

On peut donc calculer à tout instant  $L$  et sa valeur de seuil.

## Exemple d'intégration

Un certain nombre de cas simple peuvent être traités par résolution directe. C'est le cas d'une cheville cylindrique de diamètre  $d = 2r$

(5) s'écrit en négligeant le terme correctif en  $\frac{\lambda P}{GJ}$

$$-\frac{dx_1^2}{dx_2^2} + \frac{F \cdot x_1}{EI_1} + \frac{p(x_1)}{EI_2} = 0 \quad (8)$$

Par intégration de (8) on obtient la déformée

$$x_1(x_2) = -\frac{M_z}{F_{x_1}} (1 - \cos(kx_2)) + \frac{F_{x_2}}{F_{x_1}} \left( x_2 - \frac{\sin(kx_2)}{k} \right) \quad (9)$$

avec  $k^2 = \frac{F}{EI_1}$

On trouvera en Annexe 1 la présentation de la suite du calcul. On est amené à un algorithme de programmation aisée pouvant d'ailleurs se simplifier de manière importante dans certains cas.

## Profondeur limite de blocage

Réussir l'insertion suppose que l'on contrôle la condition de non blocage. Cette vérification est nuisible à la rapidité de l'opération. On va montrer que dans le cas d'une cheville cylindrique il existe une profondeur d'insertion au delà de laquelle il ne peut plus y avoir blocage.

(1) peut s'écrire

$$\theta = \frac{(x_{10} - x_{1A}) + (x_{20} - x_{2A})(p + (1 + p^2)\theta)}{L + r \frac{dx_1}{dx_2}(0)} \quad (10)$$

(11) on introduit le "clearance ratio" :  $C = \frac{D - 2r}{D}$

(10) devient

$$L > (x_{10} - x_{1A}) + (x_{20} - x_{2A}) \left[ \frac{(1 + p^2)CD}{L + r \frac{dx_1}{dx_2}(0)} + p \right] \quad (12)$$

avec  $x_{20} - x_{2A} \leq 2r$   $x_{10} - x_{1A} < r$

(12) devient

$$L > r(1 + 2p) + \frac{C(1 + p^2)}{p} = L_c$$

$L$  est la profondeur limite de blocage. Cette limite franchi une stratégie d'insertion possible est de laisser une certaine liberté au poignet du robot afin que les actions de contact corrigent les erreurs d'alignement. Toutefois ces forces ne sont pas forcément auto-correctrices.

### Le blocage partiel

L'effet des actions de contact peut corriger ou non les défauts d'alignement. Dans le cas d'une situation négative un simple déplacement du robot corrigera la configuration, ceci sans effort important contrairement au blocage total.

On se place dans le cas du glissement. Les supports des actions de contact en A et en B sont concourants en H.

Posons

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{dx_2}{dx_1} (B) \quad C_1 = 1 + \frac{1 + \nu^2}{\nu} \frac{dx_2}{dx_1} \quad C_2 = 1 - \frac{(1 + \nu^2) \theta}{\nu}$$

Les coordonnées de H sont :

$$x_{H1} = \frac{\nu (x_{2A} - x_{2B})}{C_1 + C_2} + \frac{(C_1 x_{1B} + C_2 x_{1A})}{C_1 + C_2}$$

$$x_{H2} = \frac{C_2}{\nu} x_{1A} + x_{2A} - \frac{\nu C_2 (x_{2A} - x_{2B})}{C_1 + C_2} - \frac{C_2 (C_1 x_{1B} + C_2 x_{1A})}{\nu (C_1 + C_2)}$$

Le moment des forces en H :  $M_H = M_I - x_{H1} F_{x2} + x_{H2} F_{x1}$

Il y aura autocorrection si :

$$-\frac{M_I}{F_{x1}} + x_{H1} \frac{F_{x2}}{F_{x1}} < x_{H2} \text{sign}(\theta)$$

### Cas particulier d'une cheville cylindrique

Les calculs liés au blocage total développés en Annexe 1, fournissent tous les éléments pour le calcul de cette condition à l'exception de  $\frac{dx_2}{dx_1}$  (fig.4)

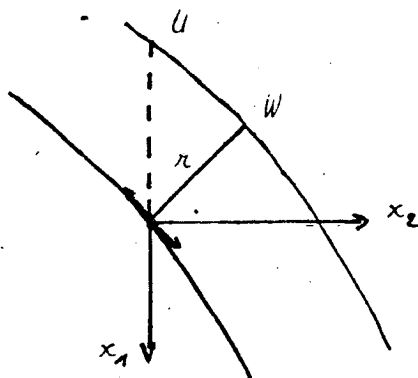


fig. 4

La pente de  $J$  en B est la même que la pente en W de la ligne neutre

$$x_{Aw} = x_{As} + n \frac{dx_s}{dx_A} B$$

et

$$\frac{dx_s}{dx_A} (x_{Aw}) = - \frac{M_I}{F_{x_A}} k \sin(kx_{Aw}) + \frac{F_{x_2}}{F_{x_A}} (1 - \cos(kx_{Aw}))$$

d'où

$$\frac{dx_s}{dx_A} = \frac{- \frac{M_I}{F_{x_A}} k \sin(kx_{As}) + \frac{F_{x_2}}{F_{x_A}} (1 - \cos(kx_{As}))}{1 + \frac{B n M_I}{F_{x_A}} \cos(kx_{As}) + \frac{F_{x_2} k \sin(kx_{As})}{F_{x_A}}}$$

### Conclusion

On a pu généraliser la théorie de SIMUNOVIC sur les problèmes mécaniques intervenant lors d'une insertion. Diverses expériences sont en cours pour la vérification complète de ces calculs.

Pour la réalisation d'assemblage délicat l'introduction d'une telle théorie (et de sa généralisation au cas spatial) devrait permettre de réduire considérablement le pourcentage d'échec et de diminuer la durée de montage.

# Annexe 1

Condition de non blocage pour une cheville cylindrique de diamètre  $d = 2 r$ , de longueur  $L$

Posons

$$A = \frac{M_z^2}{F_{x_1} EI_z}$$

$$B = \left( \frac{F_{x_2}}{F_{x_1}} \right)^2$$

$$C = - \frac{k M_z F_{x_2}}{F_{x_1}^2}$$

$$U = \frac{A \sin(2kL)}{8k} + B \left( \frac{\sin(kL)}{k} - \frac{\sin(2kL)}{8k} \right) + \frac{\epsilon}{k} \left( \frac{\cos(2kL)}{4} - \cos(kL) + \frac{3}{4} \right) - L \left( \frac{A}{4} + \frac{3B}{4} \right)$$

$$V = 1 + \frac{A}{2} \sin^2(kL) + \frac{B}{2} (\cos(kL) - 1)^2 + C \left( \sin(kL) - \frac{\sin(2kL)}{2} \right)$$

$$\epsilon = \frac{U}{V}$$

On a alors selon (6)

$$x_{A_0} = L + \epsilon \quad x_{z_0} = - \frac{M_z}{F_{x_1}} (1 - \cos(kx_{A_0})) + \frac{F_{x_2}}{F_{x_1}} x_{A_0} - \frac{\sin(kx_{A_0})}{k}$$

$$\frac{dx_{z_0}}{dx_A} = - \frac{k M_z}{F_{x_1}} \sin(kx_{A_0}) + \frac{F_{x_2}}{F_{x_1}} (1 - \cos(kx_{A_0}))$$

En écrivant que A se trouve sur la droite passant par O et perpendiculaire à la ligne neutre

$$x_{A_A} = x_{A_0} + \text{signe} \left( \frac{dx_{z_0}}{dx_A}(0) \right) r \sqrt{\frac{1}{1 + \left( \frac{\frac{dx_{z_0}}{dx_A}(0)}{r} \right)^2}} \quad x_{z_A} = x_{z_0} - \frac{r}{\frac{dx_{z_0}}{dx_A}(0)} \sqrt{\frac{1}{1 + \left( \frac{\frac{dx_{z_0}}{dx_A}(0)}{r} \right)^2}}$$

En utilisant (7)

$$x_{z_B} = r - \frac{M_z}{F_{x_1}} (1 - \cos(kx_{A_B})) + \frac{F_{x_2}}{F_{x_1}} x_{A_B} - \frac{\sin(kx_{A_B})}{k}$$

On dispose alors de tous les éléments pour exprimer la condition de non blocage ( / )

Références

- [1] KONDOLEON, A.S. 1976 Application of Technology - Economic Model of assembly techniques to programmable Assembly Machine Configuration S.M. Thesis, MIT Mechanical Engineering Département
- [2] SIMUNOVIC "Force Information in assembly process" 5th International Symposium on Industrial Robots
- [3] H. Mc CALLION, P.C. WONG" Some Thoughts on the Automatic Assembly of a Peg and Hole" The Industrial Robot Décembre 1975
- [4] J.L. NEVINS, D.E. WHITNEY "Research on advanced assembly automation" Computer Décembre 1977 Vol 10 n°12
- [5] A. STEPOURJINE, F. LHOTE "Terminal d'Insertion automatique pour robot d'assemblage" 3ème journées scientifiques et techniques de la Production Automatisée Toulouse 3.5 juin 81

